

**КАЗАНСКИЙ КООПЕРАТИВНЫЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)  
АВТОНОМНОЙ НЕКОММЕРЧЕСКОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ  
ОРГАНИЗАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ЦЕНТРОСОЮЗА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КООПЕРАЦИИ»**

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

Специальность: 10.05.01 Компьютерная безопасность

Специализация: «Разработка защищенного программного обеспечения»

Формы обучения: очная

Объем дисциплины:

в зачетных единицах: 4 з.е.

в академических часах: 144 ак.ч.

Форма промежуточной аттестации: экзамен

## **Оценочные материалы по дисциплине Численные методы**

**обсуждены и рекомендованы** к утверждению решением кафедры естественных дисциплин, сервиса и туризма от 25 марта 2025 г., протокол № 6

**одобрены** Научно-методическим советом Казанского кооперативного института (филиала) от 2 апреля 2025 г., протокол № 3

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1. Паспорт оценочных материалов
2. Оценочные материалы:
  - 2.1. Оценочные материалы для проведения текущего контроля.
  - 2.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Целью оценочных материалов по дисциплине (далее –ОМ) является комплексная оценка результатов обучения.

ОМ предназначены для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

ОМ включают оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Оценочные материалы разработаны в соответствии с рабочей программой дисциплины Численные методы.

## 1. Паспорт оценочных материалов по дисциплине «Численные методы»

| Формируемые компетенции<br>(код и наименование компетенции)                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Планируемые<br>результаты обучения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Контролируемые разделы, темы<br>дисциплины                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Наименование<br>оценочного средства |                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Текущий контроль                    | Промежуточная<br>аттестация           |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 5                                   | 6                                     |
| <p>ОПК-3<br/>Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности</p> <p>ОПК-3.2<br/>Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением основных математических методов.</p> | <p>Знает методы проведения экспериментов и наблюдений, обобщения и обработки информации, методы использования и адаптации существующих математических методов и систем программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач. Умеет применять методы проведения экспериментов, использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования</p> | <p>Тема 1. Обусловленность математической модели и линейных систем. Понятие и примеры.</p> <p>Тема 2. Прямые методы решения СЛАУ.</p> <p>Тема 3. Ортогональные преобразования матрицы для решения СЛАУ.</p> <p>Тема 4. Итерационные методы решения СЛАУ. Сходимость, оценка погрешности.</p> <p>Тема 5. Интерполяция. Интерполяционные многочлены. Оценка погрешности интерполяции</p> <p>Тема 6. Многочлены Чебышева. Интерполяция сплайнами. Метод наименьших квадратов.</p> <p>Тема 7. Численное дифференцирование. Оценка погрешности.</p> <p>Тема 8. Вычисление корней нелинейных уравнений.</p> | <p><i>Тест 1-27</i></p>             | <p><i>Вопрос на экзамене 1-74</i></p> |

| Формируемые компетенции<br>(код и наименование компетенции) | Планируемые<br>результаты обучения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Контролируемые разделы, темы<br>дисциплины                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Наименование<br>оценочного средства |                             |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
|                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Текущий контроль                    | Промежуточная<br>аттестация |
| 1                                                           | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 5                                   | 6                           |
|                                                             | для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач. Владеет методами решения задач численного характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач, использует и адаптирует существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач. | Сходимость, оценка погрешности.<br>Тема 9. Решение систем нелинейных уравнений. Теоремы о сходимости.<br>Тема 10. Квадратурные формулы. Правило Рунге оценки погрешности.<br>Тема 11. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности.<br>Тема 12. Полная и частичная алгебраическая проблема собственных значений.<br>Тема 13. Итерационные методы решения проблемы собственных значений.<br>Тема 14. Решение задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ.<br>Тема 15. Решение краевых задач для дифференциальных и линейных уравнений.<br>Тема 16. Разностные схемы для уравнений математической физики. |                                     |                             |

| Формируемые компетенции<br>(код и наименование компетенции)                                                                                                      | Планируемые<br>результаты обучения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Контролируемые разделы, темы<br>дисциплины                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Наименование<br>оценочного средства |                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
|                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Текущий контроль                    | Промежуточная<br>аттестация    |
| 1                                                                                                                                                                | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 5                                   | 6                              |
| ОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных | Знает основные численные методы решения СЛАУ, интерполяции, дифференцирования, вычисления корней нелинейных уравнений, решения систем нелинейных уравнений.<br>Умеет обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением численных методов. Владеет методами и средствами построения моделей и анализа их применимости в заданной предметной области в приложении к задачам, решаемым | Тема 1. Обусловленность математической модели и линейных систем. Понятие и примеры.<br>Тема 2. Прямые методы решения СЛАУ.<br>Тема 3. Ортогональные преобразования матрицы для решения СЛАУ.<br>Тема 4. Итерационные методы решения СЛАУ. Сходимость, оценка погрешности.<br>Тема 5. Интерполяция. Интерполяционные многочлены. Оценка погрешности интерполяции<br>Тема 6. Многочлены Чебышева. Интерполяция сплайнами. Метод наименьших квадратов.<br>Тема 7. Численное дифференцирование. Оценка погрешности.<br>Тема 8. Вычисление корней нелинейных уравнений. Сходимость, оценка погрешности. | <i>Тест 1-27</i>                    | <i>Вопрос на экзамене 1-74</i> |

| Формируемые компетенции<br>(код и наименование компетенции) | Планируемые<br>результаты обучения | Контролируемые разделы, темы<br>дисциплины                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Наименование<br>оценочного средства |                             |
|-------------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
|                                                             |                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Текущий контроль                    | Промежуточная<br>аттестация |
| 1                                                           | 3                                  | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 5                                   | 6                           |
|                                                             | численными<br>методами.            | <p>Тема 9. Решение систем нелинейных уравнений. Теоремы о сходимости.</p> <p>Тема 10. Квадратурные формулы. Правило Рунге оценки погрешности.</p> <p>Тема 11. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности.</p> <p>Тема 12. Полная и частичная алгебраическая проблема собственных значений.</p> <p>Тема 13. Итерационные методы решения проблемы собственных значений.</p> <p>Тема 14. Решение задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ.</p> <p>Тема 15. Решение краевых задач для дифференциальных и линейных уравнений.</p> <p>Тема 16. Разностные схемы для уравнений математической физики.</p> |                                     |                             |

## 2. Оценочные материалы по дисциплине «Численные методы»

### 2.1 Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

#### Вопросы для коллоквиумов, устных опросов, самостоятельной неаудиторной работы

1. Какое требование обязательно при построении интерполяционного многочлена Лагранжа?
  - a. узлы интерполяции располагаются на равном расстоянии друг от друга;
  - b. крайние узлы интерполяции совпадают с концами отрезка интерполирования;
  - c. количество точек интерполяции равно степени интерполяционного многочлена;
  - d. интерполяционный многочлен в узлах интерполяции принимает значения интерполируемой функции.
2. Пусть точное значение  $A = 500$ , а приближенное  $a = 500,5$ . Относительная погрешность приближенного числа равна:
  - a. 0,001;
  - b. 0,01;
  - c. 0,1;
  - d. 0,5.
3. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений у которой существует единственное решение. При использовании метода простой итерации для её решения в промежуточных вычислениях допущена ошибка. Тогда приближенное решение системы:
  - a. найти невозможно;
  - b. найти можно только если задано достаточно близкое к точному решению начальное приближение;
  - c. найти можно только в случае, когда в матрице системы нет нулевых элементов;
  - d. найти можно.
4. Какое из условий не является обязательным в определении интерполяционного кубического сплайна?
  - a. первая производная на каждом частичном отрезке является полиномом степени не выше второй;
  - b. вторая производная непрерывна на всем отрезке;
  - c. третья производная непрерывна в точках «склейки»;
  - d. значения сплайна заданы в нескольких точках.
5. Какое из следующих утверждений верно?
  - a. функция  $u = gg'(x)$  приближает функцию  $u = ff'(x)$  в точке  $x_1$  лучше, чем в точке  $x_2$ ;
  - b. функция  $u = gg'(x)$  приближает функцию  $u = ff'(x)$  в точке  $x_1$

так же хорошо, как и в точке  $x_2$ ;

с. функция  $y = g(g'(x))$  приближает функцию  $y = f(f'(x))$  в точке  $x_1$  хуже, чем в точке  $x_2$ .

6. Пусть  $A$  – точное значение некоторой величины. Абсолютной погрешностью приближенного числа  $a$  называется:

а. наименьшее доступное число  $\Delta a$ , не превосходящее  $|A - a|$ ;

б. наименьшее доступное число  $\Delta a$ , не меньшее  $|A - a|$ ;

с. наибольшее доступное число  $\Delta a$ , не меньшее  $|A - a|$ ;

д. наибольшее доступное число  $\Delta a$ , не превосходящее  $|A - a|$ .

7. Какой из методов не относится к точным методам решения систем линейных уравнений?

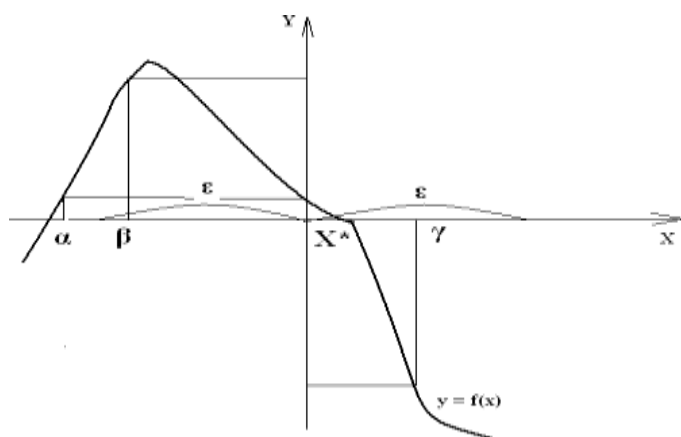
а. метод Гаусса;

б. метод Зейделя;

с. метод Крамера;

д. метод прогонки.

8. Пусть  $x^*$  – точный, а  $\alpha, \beta, \gamma$  – приближённые корни уравнения  $f(x) = 0$ . По рисунку определите, какая из точек является лучшим приближением к корню?

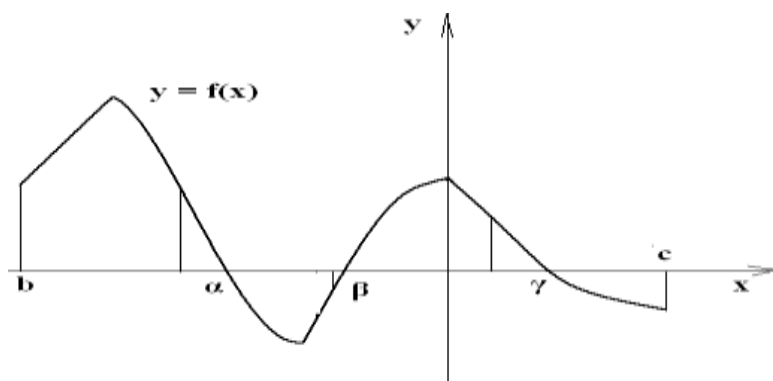


а.  $\alpha$ ;

б.  $\beta$ ;

с.  $\gamma$ .

9. Уравнение  $f(x) = 0$  на отрезке  $[b; c]$  имеет три корня  $\alpha, \beta, \gamma$ . Пользуясь рисунком, определите, какой корень получится в результате применения метода половинного деления?



- a.  $\alpha$ ;
- b.  $\beta$ ;
- c.  $\gamma$ ;
- d. ответить нельзя.

10. При замене краевой задачи сеточной используются формулы:

$$2 - 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4$$

12. Какое из чисел имеет такой же порядок, как и число  $2,5 \cdot 10^{-3}$ ?

- a. 0,008;
- b.  $10^{-2}$ ;
- c.  $0,56 \cdot 10^{-4}$ ;
- d. 0,00025.

13. Пусть задана квадратичная функция  $y(x)$  и точки:  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h$ . Какая из формул даёт точное значение?

- a.  $y'(x_1)$
- b.  $y'(x_0)$

$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$$

$$\frac{y(x_2) - y(x_0)}{2h}$$

$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$$

$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$$

$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$$

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{h}$$

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{h}$$

14. Интерполяционный многочлен Ньютона задан формулой  $N = 1 - 2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 3)$ . Какое число является значением заданной функции в одной из точек интерполяции?

- a. -4;
- b. 12;
- c. 17;
- d. 29.

15. Для какого из приближённых методов отыскания корня уравнения достаточно задать одно начальное приближение?

- a. метод хорд;
- b. метод секущих;

- с. метод касательных;
  - d. метод половинного деления.
16. Какое из утверждений о методе Эйлера решения задачи Коши не является верным?
- a. метод Эйлера имеет второй порядок точности;
  - b. метод Эйлера является частным случаем метода Рунге-Кутты;
  - с. метод Эйлера является частным случаем метода разложения решения в ряд Тейлора;
  - d. в вычислениях значений приближённого решения при переходе к следующей точке допускается менять шаг.
17. Интерполяционный многочлен какой степени используется для построения квадратуры Симпсона численного интегрирования?

### **Тестовые задания для проведения промежуточной аттестации**

**ОПК-3** Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности

**ОПК-3.2** Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением основных математических методов

|       |                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Знать | методы проведения экспериментов и наблюдений обобщения и обработки информации, методы использования и адаптации существующих математических методов и систем программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач. |
| Уметь | применять методы проведения экспериментов, использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.                                          |

**ОПК-3.4** Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных

|       |                                                                                                                                                       |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Знать | основные численные методы решения СЛАУ, интерполяции, дифференцирования, вычисления корней нелинейных уравнений, решения систем нелинейных уравнений. |
| Уметь | обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением численных методов                        |

**1. Задание комбинированного типа с выбором одного верного ответа из четырех предложенных и обоснованием выбора. Уровень сложности базовый. Время выполнения 3 мин.**

1. Число обусловленности матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$  приблизительно равно:

- A)  $10^3$
- B)  $10^6$
- C)  $10^9$
- D)  $10^{12}$

Обоснование: Матрица близка к вырожденной ( $\Delta \approx -1$ ), её число обусловленности очень велико ( $\sim 10^6$ )

Ответ: B)  $10^6$

2. Какой из прямых методов решения СЛАУ наиболее устойчив к ошибкам округления?

- A) Метод Гаусса без выбора ведущего элемента
- B) Метод Крамера
- C) Метод Гаусса с выбором ведущего элемента
- D) Метод квадратного корня

Обоснование: Метод Гаусса с выбором ведущего элемента уменьшает влияние ошибок округления

Ответ: C) Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

3. Какое преобразование используется в QR-алгоритме для приведения матрицы к треугольному виду?

- A) Преобразование Фурье
- B) Преобразование Лапласа
- C) Преобразование Хаусхолдера
- D) Z-преобразование

Обоснование: Преобразование Хаусхолдера используется для QR-разложения

Ответ: C) Преобразование Хаусхолдера

4. Условие сходимости метода простой итерации для СЛАУ  $Ax = b$ :

- A)  $\|A\| < 1$
- B)  $\|I - A\| < 1$
- C)  $\rho(B) < 1$ , где  $B$  - матрица перехода
- D)  $\det(A) \neq 0$

Обоснование: Критерий сходимости - спектральный радиус матрицы перехода меньше 1

Ответ: C)  $\rho(B) < 1$ , где  $B$  - матрица перехода

5. Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа степени  $n$  для функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  оценивается как:

- A)  $|f(x) - L_n(x)| \leq (M_{n+1}/(n+1)!) \cdot |\omega_{n+1}(x)|$
- B)  $|f(x) - L_n(x)| \leq M_n \cdot |x - x_0|$
- C)  $|f(x) - L_n(x)| \leq \sum |f(x_i) - L_n(x_i)|$
- D)  $|f(x) - L_n(x)| \leq \max |f'(x)| \cdot |b-a|$

Обоснование: Это стандартная оценка погрешности интерполяции

Ответ: A)  $|f(x) - L_n(x)| \leq (M_{n+1}/(n+1)!) \cdot |\omega_{n+1}(x)|$

6. Многочлены Чебышева используются для минимизации:

- A) Погрешности аппроксимации в равномерной норме
- B) Среднеквадратичной погрешности
- C) Абсолютной погрешности в одной точке
- D) Относительной погрешности

Обоснование: Многочлены Чебышева минимизируют максимальное уклонение

Ответ: A) Погрешности аппроксимации в равномерной норме

7. Формула численного дифференцирования второго порядка точности для  $f'(x)$ :

- A)  $(f(x+h) - f(x-h))/(2h)$
- B)  $(f(x+h) - f(x))/h$
- C)  $(-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h))/(2h)$
- D)  $(f(x) - f(x-h))/h$

Обоснование: Центральная разность имеет второй порядок точности

Ответ: A)  $(f(x+h) - f(x-h))/(2h)$

8. Метод Ньютона для уравнения  $f(x) = 0$  имеет сходимость:

- A) Линейную
- B) Квадратичную
- C) Кубическую
- D) Логарифмическую

Обоснование: Метод Ньютона имеет квадратичную сходимость в окрестности корня

Ответ: B) Квадратичную

9. Правило Рунге используется для:

- A) Оценки погрешности численного интегрирования
- B) Решения дифференциальных уравнений
- C) Нахождения собственных значений
- D) Интерполяции функций

Обоснование: Правило Рунге применяется для апостериорной оценки погрешности

Ответ: A) Оценки погрешности численного интегрирования

10. QR-алгоритм используется для решения:

- A) Задачи Коши
- B) Краевой задачи
- C) Полной проблемы собственных значений
- D) Систем нелинейных уравнений

Обоснование: QR-алгоритм предназначен для нахождения всех собственных значений

Ответ: C) Полной проблемы собственных значений

**2. Задание комбинированного типа с выбором нескольких вариантов ответа из предложенных и развернутым обоснованием выбора. Уровень сложности базовый. Время выполнения 3 мин.**

11. Какие из перечисленных методов являются прямыми методами решения СЛАУ?

- 1) Метод Гаусса
- 2) Метод Якоби
- 3) LU-разложение
- 4) Метод Зейделя

Обоснование: Метод Гаусса и LU-разложение - прямые методы (дают точное решение за конечное число операций), а методы Якоби и Зейделя - итерационные

Ответ: Метод Гаусса, LU-разложение

12. Какие из утверждений о числе обусловленности матрицы ВЕРНЫ?

- 1) Чем больше число обусловленности, тем хуже обусловлена система
- 2) Число обусловленности всегда  $\geq 1$
- 3) Число обусловленности не зависит от нормы матрицы
- 4) Для единичной матрицы число обусловленности равно 0

Обоснование: Верны первые два утверждения. Число обусловленности зависит от выбора нормы, для единичной матрицы оно равно 1

Ответ: Чем больше число обусловленности, тем хуже обусловлена система; Число обусловленности всегда  $\geq 1$

13. Какие свойства имеют многочлены Чебышева  $T_n(x)$ ?

- 1) Минимальная норма на  $[-1, 1]$  среди всех многочленов степени  $n$  со старшим коэффициентом  $2^{n-1}$
- 2) Рекуррентное соотношение:  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
- 3) Все корни лежат вне отрезка  $[-1, 1]$
- 4) Ортогональность с весом  $1/\sqrt{1-x^2}$  на  $[-1, 1]$

Обоснование: Верны первые два утверждения. Корни лежат внутри  $[-1, 1]$ , ортогональность с весом  $1/\sqrt{1-x^2}$

Ответ: Минимальная норма на  $[-1, 1]$  среди всех многочленов степени  $n$  со старшим коэффициентом  $2^{n-1}$ ; Рекуррентное соотношение:  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

14. Какие из методов относятся к методам решения нелинейных уравнений?

- 1) Метод половинного деления
- 2) Метод Ньютона
- 3) Метод простой итерации
- 4) Метод Гаусса

Обоснование: Первые три метода используются для нелинейных уравнений, метод Гаусса - для СЛАУ

Ответ: Метод половинного деления; Метод Ньютона; Метод простой итерации

15. Какие из утверждений о квадратурных формулах ВЕРНЫ?

- 1) Формула Симпсона имеет алгебраическую степень точности 3
- 2) Формула прямоугольников точна для линейных функций
- 3) Формула Гаусса с  $n$  узлами имеет степень точности  $2n-1$
- 4) Формула трапеций точна для квадратичных функций

Обоснование: Верны первое и третье утверждения. Формула прямоугольников не точна для линейных функций, формула трапеций точна только для линейных

Ответ: Формула Симпсона имеет алгебраическую степень точности 3; Формула Гаусса с  $n$  узлами имеет степень точности  $2n-1$

**3. Задание закрытого типа на установление соответствия. Уровень сложности повышенный. Время выполнения 5 мин.**

16. Установите соответствие между методами и их назначением:

| Метод                | Назначение                       |
|----------------------|----------------------------------|
| 1. Метод Рунге-Кутты | А. Решение краевых задач для ОДУ |
| 2. Метод прогонки    | В. Решение задачи Коши для ОДУ   |
| 3. Метод Ньютона     | С. Решение нелинейных уравнений  |
| 4. Метод Гаусса      | Д. Решение СЛАУ                  |

Обоснование: Метод Рунге-Кутты для задачи Коши, метод прогонки для краевых задач, метод Ньютона для нелинейных уравнений, метод Гаусса для СЛАУ

Ответ: 1-В, 2-А, 3-С, 4-Д

17. Установите соответствие между понятиями и их определениями:

| Понятие                  | Определение                                     |
|--------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. Число обусловленности | А. Максимальное по модулю собственное значение  |
| 2. Спектральный радиус   | В. Мера чувствительности решения к погрешностям |
| 3. Порядок точности      | С. Скорость убывания погрешности                |
| 4. Аппроксимация         | Д. Замена исходной задачи близкой               |

Обоснование: Число обусловленности - мера чувствительности, спектральный радиус - максимальное собственное значение, порядок точности - скорость убывания погрешности, аппроксимация - замена исходной задачи

Ответ: 1-В, 2-А, 3-С, 4-Д

18. Установите соответствие между методами и их сходимостью:

| Метод                                | Сходимость        |
|--------------------------------------|-------------------|
| 1. Метод простой итерации (линейная) | A. $\rho(B) < 1$  |
| 2. Метод Ньютона                     | B. Квадратичная   |
| 3. Метод половинного деления         | C. Линейная (1/2) |
| 4. Степенной метод                   | D. Линейная       |

Обоснование: Метод простой итерации сходится при  $\rho(B) < 1$ , метод Ньютона квадратичный, метод половинного деления линейный с коэффициентом 1/2, степенной метод линейный

Ответ: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D

19. Установите соответствие между квадратурными формулами и их степенью точности:

| Формула            | Степень точности |
|--------------------|------------------|
| 1. Прямоугольников | A. 1             |
| 2. Трапеций        | B. 1             |
| 3. Симпсона        | C. 3             |
| 4. Гаусса (2 узла) | D. 3             |

Обоснование: Формулы прямоугольников и трапеций имеют степень 1, Симпсона - 3, Гаусса с 2 узлами - 3

Ответ: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D

20. Установите соответствие между разностными схемами и их свойствами:

| Схема                    | Свойство                   |
|--------------------------|----------------------------|
| 1. Явная схема           | A. Условно устойчивая      |
| 2. Неявная схема         | B. Безусловно устойчивая   |
| 3. Схема Кранка-Николсон | C. Второй порядок точности |
| 4. Предиктор-корректор   | D. Повышенная точность     |

Обоснование: Явная схема условно устойчива, неявная безусловно устойчива, схема Кранка-Николсон имеет второй порядок, метод предиктор-корректор дает повышенную точность

Ответ: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D

**4. Задание закрытого типа на установление последовательности. Уровень сложности повышенный. Время выполнения 5 мин.**

21. Расположите в правильном порядке шаги метода Ньютона для решения  $f(x)=0$ :

1) Вычисление нового приближения:  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

- 2) Проверка критерия останова
- 3) Выбор начального приближения  $x_0$
- 4) Вычисление  $f(x_n)$  и  $f'(x_n)$

Правильная последовательность: Выбор начального приближения  $x_0 \rightarrow$  Вычисление  $f(x_n)$  и  $f'(x_n) \rightarrow$  Вычисление нового приближения:  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \rightarrow$  Проверка критерия останова

Ответ: 3, 4, 1, 2

22. Расположите в правильном порядке этапы решения краевой задачи методом конечных разностей:

- 1) Построение разностной схемы
- 2) Решение полученной СЛАУ
- 3) Аппроксимация производных разностными отношениями
- 4) Анализ устойчивости и сходимости

Правильная последовательность: Аппроксимация производных разностными отношениями  $\rightarrow$  Построение разностной схемы  $\rightarrow$  Решение полученной СЛАУ  $\rightarrow$  Анализ устойчивости и сходимости

Ответ: 3, 1, 2, 4

23. Расположите в правильном порядке шаги метода прогонки:

- 1) Прямой ход: вычисление прогоночных коэффициентов
- 2) Обратный ход: нахождение решения
- 3) Приведение системы к трехдиагональному виду
- 4) Проверка условия корректности

Правильная последовательность: Приведение системы к трехдиагональному виду  $\rightarrow$  Проверка условия корректности  $\rightarrow$  Прямой ход: вычисление прогоночных коэффициентов  $\rightarrow$  Обратный ход: нахождение решения

Ответ: 3, 4, 1, 2

24. Расположите в правильном порядке этапы построения интерполяционного сплайна:

- 1) Решение системы уравнений для коэффициентов сплайна
- 2) Запись условий непрерывности и гладкости
- 3) Выбор узлов интерполяции
- 4) Определение вида сплайна (линейный, кубический)

Правильная последовательность: Выбор узлов интерполяции  $\rightarrow$  Определение вида сплайна (линейный, кубический)  $\rightarrow$  Запись условий непрерывности и гладкости  $\rightarrow$  Решение системы уравнений для коэффициентов сплайна

Ответ: 3, 4, 2, 1

25. Расположите в правильном порядке шаги метода Рунге-Кутты 4-го порядка:

- 1)Вычисление наклона в средней точке
- 2)Вычисление наклона в начале интервала
- 3)Вычисление средневзвешенного наклона
- 4)Вычисление наклона в конце интервала

Правильная последовательность: Вычисление наклона в начале интервала  
→ Вычисление наклона в средней точке → Вычисление наклона в конце интервала → Вычисление средневзвешенного наклона

Ответ: 2, 1, 4, 3

### **5.Задание открытого типа с развернутым ответом.**

**Уровень сложности высокий. Время выполнения 10 мин.**

26. Реализуйте метод простой итерации для решения СЛАУ и проведите две итерации для системы:

$$2x + y = 5$$

$$x + 3y = 5$$

С начальным приближением  $(x_0, y_0) = (1, 1)$

Решение:

Приводим систему к виду  $x = \varphi_1(x, y)$ ,  $y = \varphi_2(x, y)$ :

$$x = (5 - y)/2$$

$$y = (5 - x)/3$$

Первая итерация:

$$x_1 = (5 - 1)/2 = 2$$

$$y_1 = (5 - 1)/3 = 4/3 \approx 1.333$$

Вторая итерация:

$$x_2 = (5 - 4/3)/2 = (15/3 - 4/3)/2 = (11/3)/2 = 11/6 \approx 1.833$$

$$y_2 = (5 - 2)/3 = 3/3 = 1$$

Ответ: После двух итераций: (1.833, 1)

27. Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблицей:

x: 0, 1, 2

y: 1, 3, 7

Оцените погрешность в точке  $x=0.5$ , если известно, что  $|f'''(x)| \leq 6$

Решение:

Многочлен Лагранжа:

$$L(x) = 1 \cdot ((x-1)(x-2))/((0-1)(0-2)) + 3 \cdot ((x-0)(x-2))/((1-0)(1-2)) + 7 \cdot ((x-0)(x-1))/((2-0)(2-1))$$

$$L(x) = 1 \cdot (x^2 - 3x + 2)/2 + 3 \cdot (x^2 - 2x)/(-1) + 7 \cdot (x^2 - x)/2$$

$$L(x) = (x^2 - 3x + 2)/2 - 3x^2 + 6x + (7x^2 - 7x)/2$$

$$L(x) = 0.5x^2 - 1.5x + 1 - 3x^2 + 6x + 3.5x^2 - 3.5x$$

$$L(x) = (0.5 - 3 + 3.5)x^2 + (-1.5 + 6 - 3.5)x + 1$$

$$L(x) = x^2 + x + 1$$

Проверка:  $L(0)=1$ ,  $L(1)=3$ ,  $L(2)=7$  - верно

Оценка погрешности в точке  $x=0.5$ :

$$|f(x) - L(x)| \leq (M_3/3!) \cdot |(x-0)(x-1)(x-2)|$$

$$|f(0.5) - L(0.5)| \leq (6/6) \cdot |(0.5)(-0.5)(-1.5)| = 1 \cdot |0.375| = 0.375$$

Ответ:  $L(x) = x^2 + x + 1$ , погрешность в точке 0.5 не превышает 0.375

28. Решите задачу Коши для уравнения  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 1$  на отрезке  $[0, 0.2]$  методом Эйлера с шагом  $h=0.1$

Решение:

Метод Эйлера:  $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Первая итерация ( $x_0=0$ ,  $y_0=1$ ):

$$y_1 = y_0 + h \cdot (x_0 + y_0) = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$x_1 = 0.1$$

Вторая итерация ( $x_1=0.1$ ,  $y_1=1.1$ ):

$$y_2 = y_1 + h \cdot (x_1 + y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.2 = 1.1 + 0.12 = 1.22$$

$$x_2 = 0.2$$

Ответ:  $y(0.2) \approx 1.22$

### Критерии оценки для проведения экзамена по дисциплине (тестирование)

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок.

| Оценка                                  | Уровень сформированности компетенции | Критерии                                        |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------|
| «Отлично»<br>(«зачтено»)                | Высокий                              | Выполнено более 80% заданий предложенного теста |
| «Хорошо»<br>(«зачтено»)                 | Хороший                              | Выполнено 60-80% заданий предложенного теста    |
| «Удовлетворительно»<br>(«зачтено»)      | Достаточный                          | Выполнено 35-60% заданий предложенного теста    |
| «Неудовлетворительно»<br>(«не зачтено») | Недостаточный                        | Выполнено менее 35% заданий предложенного теста |

## 2.2 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

### Вопросы к экзамену:

ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач

профессиональной деятельности

ОПК-3.1 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением основных математических методов.

ОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных

### **Вопросы для подготовки к экзамену**

1. Основные этапы математического моделирования. Классификация погрешностей. Особенности машинной арифметики.
2. Корректность математической модели. Примеры устойчивых и неустойчивых математических задач. Обусловленность математической модели. Обусловленность вычислительного алгоритма.
3. Обусловленность линейных алгебраических систем. Примеры.
4. Метод исключения Гаусса решения линейных алгебраических систем, вычисления определителя и нахождения обратной матрицы.
5. LU-разложение матрицы. Условия существования LU-разложения.
6. Решение линейных систем с помощью LU-разложения. Метод Гаусса с выбором ведущего элемента.
7. Метод квадратного корня.
8. Метод прогонки.
9. Условия корректности и устойчивости метода прогонки.
10. Поведение числа обусловленности при матричных преобразованиях.
11. Метод вращений.
12. Метод отражений.
13. Метод простой итерации для систем линейных алгебраических уравнений. Достаточное условие сходимости.
14. Метод Якоби решения систем линейных уравнений. Апостериорная оценка погрешности для метода простой итерации. Необходимое и достаточное условие сходимости метода простой итерации (без док-ва).
15. Метод Зейделя для систем вида  $x=Bx+C$ , достаточное условие сходимости (без док-ва). Метод Зейделя для систем вида  $Ax=B$ . Теорема о сходимости.
16. Апостериорная оценка погрешности в методе Зейделя. Теорема о сходимости метода Зейделя для случая симметричной матрицы (без док-ва).
17. Метод релаксации, теорема о сходимости (без док-ва). О других итерационных методах решения СЛАУ.
18. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
19. Интерполяционный многочлен Ньютона.

20. Оценка остаточного члена интерполяционного многочлена.
21. Интерполяция с кратными узлами. Пример.
22. Многочлены Чебышева П. Л.
23. Минимизация оценки остаточного члена интерполяционной формулы. О сходимости интерполяционного процесса. Теорема Фабера (без док-ва).
24. Интерполяция сплайнами. Интерполяционный кубический сплайн. Локальный сплайн.
25. Глобальные способы построения кубических сплайнов. Оценка погрешности кубического сплайна.
26. Метод наименьших квадратов.
27. Численное дифференцирование. Метод неопределенных коэффициентов. Примеры построения формул численного дифференцирования.
28. Оценка погрешности аппроксимации формул численного дифференцирования с помощью формулы Тейлора.
29. О вычислительной погрешности формул численного дифференцирования.
30. Решение нелинейных уравнений. Метод дихотомии. Метод простой итерации, достаточное условие сходимости.
31. Определение итерационного процесса  $p$ -ого порядка. Получение оценок для контроля погрешности в методе простой итерации.
32. Метод Ньютона, геометрическая интерпретация.
33. Теорема о сходимости метода Ньютона. Критерий оценки погрешности.
34. Метод секущих, геометрическая интерпретация. Теорема о сходимости метода секущих (без док-ва).
35. Метод обратной квадратичной интерполяции. Метод парабол.
36. Системы нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Теорема о сходимости метода простой итерации. Метод Зейделя.
37. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений. Теорема о сходимости.
38. Модификации метода Ньютона. Метод секущих. Сведение задачи решения системы нелинейных уравнений к задаче минимизации.
39. Метод продолжения по параметру.
40. Численное интегрирование. Формула прямоугольников каноническая и составная.
41. Формула трапеций каноническая и составная.
42. Формула Симсона каноническая и составная.
43. Порядок точности квадратурной формулы. Квадратурные формулы интерполяционного типа. Обусловленность квадратурных формул.
44. Квадратурные формулы Гаусса.
45. Апостериорная оценка погрешности.
46. Адаптивные квадратурные алгоритмы.
47. Метод Филона.

48. Алгебраическая проблема собственных значений. Свойства собственных значений и собственных векторов. Обусловленность задачи на собственные значения.

49. Метод интерполяции. Нахождение собственных значений трехдиагональной матрицы.

50. Степенной метод.

51. Метод исчерпывания.

52. Нахождение собственных векторов обратными итерациями.

53. Метод итерационного вращения Якоби для нахождения собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы с выбором максимального элемента.

54. Доказательство сходимости итерационного метода вращений

55. Нахождение собственных векторов итерационным методом вращения. Метод вращений с выбором оптимального элемента.

56. QR-алгоритм. Утверждение о сходимости QR-алгоритма.

57. Приведение матрицы к правой почти треугольной матрице Хессенберга. Нахождение QR разложения с помощью вращений.

58. Метод Эйлера решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

59. Метод Рунге-Кутты. Получение расчетных формул второго порядка аппроксимации.

60. Метод Рунге-Кутты для систем дифференциальных уравнений.

61. Оценка погрешности метода Рунге-Кутты по правилу двойного пересчета.

62. Методы Адамса.

63. Численное интегрирование жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

64. Метод стрельбы решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

65. Метод стрельбы для краевой задачи общего вида.

66. Метод конечных разностей решения краевой задачи для линейного уравнения второго порядка. Условие устойчивости метода прогонки для полученной разностной схемы.

67. Утверждение о сходимости решения разностной задачи к решению простейшей краевой задачи.

68. Метод линеаризации. Разностный метод решения краевой задачи для нелинейного уравнения второго порядка.

69. Явная разностная схема для одномерного уравнения теплопроводности, получение условия устойчивости методом гармоник.

70. Чисто неявная разностная схема для одномерного уравнения теплопроводности. Исследование устойчивости.

71. Семейство разностных схем для одномерного уравнения теплопроводности, исследование погрешности аппроксимации, условие устойчивости.

72. Разностные схемы для волнового уравнения. Условие устойчивости.

73. Разностные схемы для двумерного уравнения теплопроводности.
74. Разностная аппроксимация задач Дирихле для уравнения Пуассона.

### **Критерии оценки для проведения экзамена по дисциплине (ответы на вопросы)**

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок.

| <b>Оценка</b>                           | <b>Уровень сформированности компетенции</b> | <b>Критерии</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| «Отлично»<br>(«зачтено»)                | Высокий                                     | Обучающийся глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, тесно увязывает теорию с практикой. Обучающийся не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с практическими заданиями, показывает знания нормативного материала, правильно обосновывает принятые решения, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических заданий, демонстрирует умение самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок |
| «Хорошо»<br>(«зачтено»)                 | Хороший                                     | Обучающийся твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, допускает несущественные неточности в ответе на вопросы, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми навыками при выполнении практических заданий.                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| «Удовлетворительно»<br>(«зачтено»)      | Достаточный                                 | Обучающийся усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности и ошибки в ответе на вопросы, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения при выполнении практических заданий.                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| «Неудовлетворительно»<br>(«не зачтено») | Недостаточный                               | Обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания или выполняет неправильно.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

## **Обновление оценочных материалов**

**обсуждены и рекомендованы** к утверждению решением кафедры наименование кафедры от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г., протокол № \_\_\_\_.

**одобрены** Научно-методическим советом \_\_\_\_\_ университета (института (филиала)) от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г., протокол № \_\_\_\_.